AURLOM
Le choix du succès

FICHE DE COURS DE MATHS

TEST MESSAGE

CHAPITRES AU PROGRAMME :

1. CALCUL MATRICIEL

1. Produit de matrices

Pour que le produit de 2 matrices existe, il faut donc que le nombre de colonnes de la matrice « de gauche » soit égal au nombre de lignes de la matrice « de droite ». Retenez CG=LD (Colonnes Gauche *égales* Lignes Droite)

Remarque : si dans un produit de matrices, l'une est nulle, alors le produit est nul. En revanche, le produit de deux matrices peut être nul sans que l'une des deux soit nul.

2. Produit de matrices *carrées*

- A x (BC) = (AB) x C
- AB n'est pas égal à BA en général
- La matrice d'identité I_n est neutre pour le produit : I_n x A = A x I_n
- A x (B + C) = AB + AC ; (A+B) x C = AC+BC.

3. Formule du binôme de Newton

Si *n* est un entier naturel non nul et si A et B sont des matrices carrées de même ordre tel que AB = BA, alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$$

4. Inverse d'une matrice carrée

- $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$
- Si A et B sont des matrices inversibles d'ordre n, alors : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Soit le système linéaire *n x n, AX=B*, où la matrice A est une matrice inversible, alors ce système a une solution unique :

  $$X = A^{-1}B$$

- Pour reconnaître qu'une matrice est carrée A est inversible, on la transforme en matrice triangulaire supérieure ou inférieure par la méthode du pivot de Gauss : A est inversible si et seulement si la diagonale de la matrice triangulaire ne contient aucun zéro.

5. Déterminant : définition, calcul et propriétés

Déterminant 2 x 2

- Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ | $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Une propriété importante : si A est une matrice carrée d'ordre 2, det A = 0 si et seulement si les colonnes (ou les lignes) de A sont proportionnelles.

Déterminant n x n (2 méthodes)

- Méthode des cofacteurs
- Triangularisation de matrices en matrice triangulaire supérieure ou inférieure. On sait alors que le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.

Propriétés des déterminants

- $\det A = \det {}^tA$
- Si l'on échange deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, celui-ci est transformé en son opposé.
- Si deux lignes ou deux colonnes d'un déterminant sont identiques alors le déterminant est nul.
- Soit A une matrice carrée d'ordre n et α un réel quelconque :

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$$

- Si une ligne ou une colonne de A est multipliée par α alors le déterminant est multiplié par α.
- Un déterminant est nul si et seulement si ses lignes (ou ses colonnes) sont liées.
- On ne change pas un déterminant si on ajoute à une de ses colonnes (resp. à une de ses lignes) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes.)
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- $\det(A^m) = (\det A)^m$
- Si A est une matrice carrée d'ordre n, A est inversible <u>si et seulement si</u> det A est non nul.
- Si A est inversible, $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$. On en déduit : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

2. STATISTIQUES

- **mode** : la modalité de la variable qui correspond à l'effectif le plus élevé.
- **étendue** : se définit, pour des variables quantitatives uniquement, comme la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la série.
- **médiane** : valeur de la variable telle que 50% des individus de la série présentent une modalité inférieure à la médiane et 50% une modalité supérieure.
- **moyenne pondérée** : Si on mélange deux populations de tailles respectives N_1 et N_2, de moyennes respectives $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$, alors la moyenne respective de l'ensemble est :

$$\overline{x} = \frac{N_1 \overline{x_1} + N_2 \overline{x_2}}{N_1 + N_2}$$

- **moyenne harmonique :** $H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}$ **| moyenne quadratique :** $Q = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$
- **variance** : $\operatorname{var}(X) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{x}^2$ **|** **écart type** : $\sigma = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$
- **covariance** : $\operatorname{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$
- **coefficient de corrélation linéaire (*r*)** : $r(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}$
- **Propriétés du coefficient de corrélation linéaire :**
  - d'après l'inégalité de Schwarz, ***r* est compris entre -1 et 1.**
  - Si ***r* = 1** : l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable, et si ***r* = -1** alors l'une des variables est fonction affine décroissante.
  - si ***r* = 0**, X et Y sont linéairement indépendantes.

- **Droite de régression déduite par la méthode des moindres carrés** :

  L'équation de la droite de régression de *y* sur *x* par la méthode des moindres carrés est : *y* = *ax* + *b*, avec : $a = \dfrac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\operatorname{var}(X)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$

3. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES

1. Réunion

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \ ou \ x \in B)$$

2. Intersection

L'intersection des deux ensembles *A* et *B* est notée $A \cap B$ et est définie par :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \ et \ x \in B)$$

3. Complémentaire

Soit *A* une partie d'un ensemble *E*. Le complémentaire de A dans E est noté ^{c}A ou $\overline{A}$ et est défini par :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in E \ et \ x \notin A$$

Le complémentaire de *A* dans *E*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \ et \ x \in B)$$

4. Règles de calcul

Pour toute partie *A*, *B* et *C* de *E* on a :

- $A \cap A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap E = A$
- $A \cup A = A$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup E = E$
- $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$; $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

Distribution de l'intersection et de la réunion :

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4. CALCUL DE SOMMES

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad C_n^p = C_n^{n-p}$$

Formule de Pascal

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

Formule du binôme

Pour tous réels *x* et *y*, et pour tout entier naturel *n* :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Sommes des *n* premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme des termes d'une suite géométrique

Soit *q* un nombre réel :

$1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

$1+q+q^2+\ldots+q^n = n+1$ si $q = 1$

Série classique

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (et ce, quelque soit *x*)

5. ANALYSE COMBINATOIRE

p-listes : n^p

Ex : il y a 10^4 mots de 4 lettres qui s'écrivent avec les 10 premières lettres de l'alphabet. Ici *n* = 10 et *p* = 4)

Arrangements : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1)$

Ex : il y a $A_{15}^3 = \dfrac{15!}{(15-3)!} = \dfrac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$ façons de jouer un tiercé dans l'ordre (arranger = mettre de l'ordre) dans une course qui comprend 15 partants.

Permutations : $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$

Ex : il existe 4 ! = 24 anagrammes /permutations du mot CHAT (CHAT, CHTA, CAHT, CATH, …, TCHA,…)

Combinaisons

$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ Ex : les combinaisons de tirage de 6 boules parmi 49 au LOTO.

6. PROBABILITES

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- *P* (∅)=0
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *si A et B **sont disjoints.***
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ *si A et B **sont indépendants.***

Probabilité conditionnelle

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Formule des probabilités totales

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements, alors pour tout événement *B*,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)$$

Formule de Bayes

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événements, alors pour tout événement B, $\forall j$ variant de 1 à n,

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_j) P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B / A_i)}$$

Propriété fondamentale

Dans le cas d'équiprobabilité des événements élémentaires, si A est un événement quelconque, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$$

7. VARIABLES ALÉATOIRES

Fonction de répartition

- $\forall x \in R \; F_X(x) = P(X \leq x)$
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- $F_X(x)$ est une fonction croissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- Pour tous réels *a* et *b*, tels que *a* < *b* : $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

Variables aléatoires discrètes

On appelle **loi de probabilité** de la variable discrète X l'ensemble des couples de la forme ***(x_i ; p_i)*** où *i* décrit *I*.

On notera qu'étant donné que les événements « $X = x_i$ » forment un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{i \in I} p_i = 1.$$

Espérance : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i) = \sum_{i \in I} x_i p_i$

Propriétés de l'espérance mathématique :

- L'espérance mathématique est linéaire. Si X et Y sont deux v.a. et *a*, *b* et *c* trois nombres réels, alors : $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$
- Si *h* est une fonction de R dans R, alors on peut définir l'espérance mathématique de la v.a. *h(X)* qui est égale à $E[h(X)] = \sum_{i \in I} h(x_i) p_i$.
- En particulier, pour une v.a. X dont le carré X^2 admet une espérance, on a : $E(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i$.

Variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i \in I} x_i p_i \right)^2$

Propriétés de la variance :

- $V(X) \geq 0$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i \in I} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i \in I} x_i p_i \right)^2$
- En général : $V(X + Y) \neq V(X) + V(Y)$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Écart type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ et $\sigma(aX)=|a|\sigma(X)=|a|\sqrt{V(X)}$

Couples de variables aléatoires discrètes

Lorsque les v.a. X et Y sont indépendantes, on a :

- $E(XY)=E(X)\times E(Y)$
- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Covariance

Si X et Y sont des v.a. qui admettent une espérance et si la v.a. produit XY admet elle aussi une espérance, alors : $\text{cov}(X,\,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

Propriétés :

- $\text{cov}(X,X)=V(X)$
- Si X et Y sont indépendantes, alors : $\text{cov}(X,Y)=0$
- $V(X+Y)=V(X)+2\,\text{cov}(X,\,Y)+V(Y)$
- Si $X_1,X_2,...,X_n$ est une famille de *n* v.a. deux à deux indépendantes, alors : $V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)$

Coefficient de corrélation linéaire

Si X et Y sont des v.a. dont les variances existent alors leur covariance existe toujours, et l'on définit le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y par :

$$r=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Propriétés :

- *r* est du même signe que la covariance de X et de Y.
- *r* est un réel compris entre 0 et 1.
- Si X et Y sont indépendantes alors *r* = 0.
- Lorsque *r* = -1 ou 1 alors il existe une relation linéaire entre les variables X et Y, autrement dit, il existe deux réels *a* et *b* tels que : Y = *a*X + *b*.

LOIS

1. Loi uniforme sur l'intervalle entier [1 ; *n*]

$$\left\langle \begin{array}{l} X(\Omega) = [1;n] \\ et \\ \forall i \in [1;n],\ P(X=i) = \dfrac{1}{n} \end{array} \right.$$

- $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

2. Loi de Bernoulli *B(p)*

$$\left\langle \begin{array}{l} X(\Omega) = \{0;1\} \\ P(X=1) = p \\ P(X=0) = 1-p \end{array} \right.$$

- $E(X) = p$
- $V(X) = pq$

3. Loi binomiale *B(n, p)*

$$\left\langle \begin{array}{l} X(\Omega) \text{ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et } n \\ \forall i \in X(\Omega),\ P(X=i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \end{array} \right.$$

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

4. Loi géométrique

$$\begin{cases} X(\Omega) = N^* \text{ (ensemble des entiers naturels strictement positifs)} \\ \forall i \in N,\ P(X = i) = q^{i-1} p \end{cases}$$

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$

5. Loi de Poisson de paramètre λ

$$\begin{cases} X(\Omega) = N \text{ (ensemble des entiers naturels)} \\ \forall i \in N,\ P(X = i) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \end{cases}$$

- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

8. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Limites

- En 0, on a : $\begin{cases} \ln(1+x) \approx x \\ (1+x)^{\alpha} - 1 \approx \alpha\, x \text{ pour tout réel } \alpha \\ e^x - 1 \approx x \end{cases}$
- En 1 : $\ln x \approx x - 1$
- En l'infini : si *P* et *Q* sont deux polynômes de degré respectifs *n* et *m*, alors la fonction rationnelle : $\dfrac{P}{Q} \approx \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Dérivation

$$\lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$

Le réel *a* est appelé nombre dérivé de *f* en x_0 et $a = f'(x_0)$

Fonctions logarithmes

- $\ln 1 = 0$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln x^n = n \ln x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- Si *u* est dérivable et si *u(x)* est non nul, alors : $\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Fonctions exponentielles

- $\ln(e^x) = x$
- $e^0 = 1$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^a e^b = e^{a+b}$
- $(e^a)^b = e^{ab}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $(e^x)' = e^x$

- Si *u* est dérivable alors : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

- Pour tout réel *x* strictement positif : $e^{\ln x} = x$

Logarithme de base a

Pour $a > 0$, $y = a^x = e^{x \ln a}$ est la fonction réciproque de $y = \ln_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

9. SUITES NUMÉRIQUES

Suite arithmétique de raison *r*

$U_{n+1} = U_n + r \ (\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = r\ )$

$U_n = U_p + (n-p)r$ où U_p représente le premier terme de la suite $(U_n)_{n \geq p}$

Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(U_n)_{n \geq p}$ une suite arithmétique de raison *r* et S, la somme de tous ses termes. Le terme qui inaugure la somme S est $\boldsymbol{U_p}$, le terme qui clôture la somme S est $\boldsymbol{U_n}$ et la somme S contient ***n – p* + 1** termes.

On a alors : $S = \sum_{i=p}^{n} U_i = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2}$

Suite géométrique de raison *q*

$U_{n+1} = qU_n \ \left(\Leftrightarrow \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q \right)$

$U_n = U_p \times q^{n-p}$ où U_p représente le premier terme de la suite $(U_n)_{n \geq p}$

Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(U_n)_{n\geq p}$ une suite géométrique de raison *q* et S, la somme de tous ses termes. Le terme qui inaugure la somme S est $\boldsymbol{U_p}$, et la somme S contient ***n* – *p* + 1** termes.

On a alors

$$: S = \sum_{i=p}^{n} U_i = U_p \times \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$$ (Si *q* différent de 1)

$$S = \sum_{i=p}^{n} U_i = (n - p + 1) \times U_p$$ (Si *q* = 1)